CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

—

SESSION 2025

—

MATHÉMATIQUES

(Classes de terminale voie générale spécialité mathématiques)

Durée : 5 heures

—

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Consignes aux candidats

- Ne pas utiliser d'encre claire
- N'utiliser ni colle, ni agrafe
- Ne joindre aucun brouillon
- Ne pas composer dans la marge
- Numéroter chaque page en bas à droite (numéro de page / nombre total de pages)
- Sur chaque copie, renseigner l'en-tête + l'identification du concours :

Concours / Examen : CGL Epreuve : Mathématiques Matière : MATH Session : 2025

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Le sujet comporte trois exercices indépendants. Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.

Dans toute question, le candidat est autorisé à utiliser les résultats de questions précédentes même s'il ne les a pas démontrés, mais à condition de le mentionner explicitement

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 : Addition sur une parabole

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Pour tout point M du plan, on note $(x_M ; y_M)$ ses coordonnées.

Soient $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$ et Δ la droite d'équation $y = -1$.

Pour tous points A et B de $\mathscr{P}$ tels que $y_A \neq y_B$, on note $A \oplus B$ le point de $\mathscr{P}$ dont l'abscisse est celle du point d'intersection des droites (AB) et Δ.

Partie 1 : propriétés de $\oplus$

1. Soient A et B deux points de $\mathscr{P}$ tels que $y_A \neq y_B$. Exprimer $x_{A\oplus B}$ en fonction de x_A et x_B.
2. Soient A, B et C trois points de $\mathscr{P}$. On suppose que

$$y_A \neq y_B, \quad y_{A\oplus B} \neq y_C, \quad y_B \neq y_C, \quad y_A \neq y_{B\oplus C}.$$

   Démontrer que les points $(A \oplus B) \oplus C$ et $A \oplus (B \oplus C)$ sont confondus.

Pour tout point A de $\mathscr{P}$ distinct du point O (de coordonnées $(0;0)$), on note $A \oplus A$ le point de $\mathscr{P}$ dont l'abscisse est celle du point d'intersection de la tangente à $\mathscr{P}$ en A et de Δ.

3. Soit A un point de $\mathscr{P}$ distinct de O.
   a) Exprimer $x_{A\oplus A}$ en fonction de x_A.
   b) Soit B un point de $\mathscr{P}$ tel que

$$y_{A\oplus A} \neq y_B, \quad y_A \neq y_B, \quad y_A \neq y_{A\oplus B}.$$

   Démontrer que les points $(A \oplus A) \oplus B$ et $A \oplus (A \oplus B)$ sont confondus.

Partie 2 : étude d'une suite de points

Soit A un point de $\mathscr{P}$. On lui associe une suite de points (A_n) définie par $A_0 = A$ et la relation de récurrence :

$$\text{pour tout entier } n \geqslant 0, \quad A_{n+1} = \begin{cases} A_n \oplus A_n, & \text{si } x_{A_n} \neq 0\,; \\ O, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour alléger les notations, on pose $x_n = x_{A_n}$.

4. On suppose, dans cette question, que A est le point de coordonnées $(3;9)$.
   a) Démontrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a $x_n \neq 0$.
   b) Démontrer que la suite (x_n) ne converge pas.

On rappelle que, pour tout x dans $\mathbb{Q}^*$, il existe un unique couple d'entiers (a, b) tels que $b \geqslant 1$, $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$ et $x = \dfrac{a}{b}$. On note alors $H(x)$ le plus grand des entiers $|a|$ et $|b|$, soit $H(x) = \max\{|a|, |b|\}$.

Par exemple $H\left(\dfrac{-4}{3}\right) = 4$.

On convient de plus que $H(0) = 1$.

Pour tout point P de la parabole $\mathscr{P}$, tel que x_P appartient à $\mathbb{Q}$, on pose

$$h(P) = \ln(H(x_P)).$$

5. Démontrer que, pour tout c dans $\mathbb{N}^*$, l'ensemble $E(c) = \{P \in \mathscr{P}, x_P \in \mathbb{Q} \text{ et } h(P) \leqslant c\}$ est fini.

6. Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$. Démontrer que, si $\mathrm{PGCD}(a,b) = 1$, alors $\mathrm{PGCD}\left(a^2 - b^2, ab\right) = 1$.
7. Démontrer qu'il existe deux réels m et M tels que pour tout point P de la parabole $\mathscr{P}$ tel que x_P appartient à $\mathbb{Q}^*$, on a
$$m + h(P \oplus P) \leqslant 2h(P) \leqslant h(P \oplus P) + M.$$
8. Soit (u_n) une suite réelle. On pose
$$v_0 = 0 \quad \text{et, pour tout } n \geqslant 1, \quad v_n = \sum_{k=0}^{n-1} |u_{k+1} - u_k|.$$
On suppose que la suite (v_n) est majorée et on souhaite démontrer que la suite (u_n) converge :
   a) Démontrer que la suite (v_n) converge.
   b) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a
$$0 \leqslant u_{n+1} - u_n + |u_{n+1} - u_n| \leqslant 2|u_{n+1} - u_n|.$$
   c) En déduire que la suite $(u_n + v_n)$ converge.
   d) Conclure.
9. Soit à nouveau le point A de coordonnées $(3;9)$ et soit (A_n) la suite récurrente associée à A. Pour tout entier naturel n, on pose $t_n = \dfrac{h(A_n)}{2^n}$. Démontrer que la suite (t_n) converge.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 2 : Suite positive et suite bornée

Pour tout réel α, on appelle *suite associée* à α la suite (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et

$$u_{n+2} = u_{n+1}^2 - \alpha u_n^4$$

pour tout entier $n \geqslant 0$. On dit que α *vérifie la propriété* $\mathscr{P}$ si tous les termes de la suite (u_n) associée à α sont strictement positifs, et que α *vérifie la propriété* $\mathscr{B}$ si la suite (u_n) associée à α est bornée.

Partie 1 : Propriété $\mathscr{P}$

1) Quels sont les réels α qui vérifient la propriété $\mathscr{P}$ et qui appartiennent
   a) à l'intervalle $[1;+\infty[$?
   b) à l'intervalle $]-\infty;0]$?
2) Soit α un réel appartenant à l'intervalle $]0;1[$ et (u_n) la suite qui lui est associée ; on suppose, dans cette question, que α vérifie la propriété $\mathscr{P}$.
   a) Démontrer que $0 < u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$ pour tout entier $n \geqslant 0$.
   b) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
   c) Pour tout réel $n \geqslant 0$, on pose $x_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n^2}$. Exprimer x_{n+1} en fonction de α et de x_n.
   d) Démontrer que la suite (x_n) admet une limite finie, que l'on notera x_∞, et exprimer $x_\infty^2(1 - x_\infty)$ en fonction de α.
   e) En déduire que $\alpha \leqslant \dfrac{4}{27}$.
3) Quels sont les réels α qui vérifient la propriété $\mathscr{P}$?

Partie 2 : Propriété $\mathscr{B}$

4) Quels sont les réels α qui vérifient la propriété $\mathscr{B}$ et qui appartiennent
   a) à l'intervalle $]-\infty;0[$?
   b) à l'intervalle $[0;1]$?
5) Soit α un réel appartenant à l'intervalle $]2;+\infty[$ et (u_n) la suite qui lui est associée. Pour tout $n \geqslant 0$, on note v_n le plus grand des réels $|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_n|$, soit $v_n = \max\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_n|\}$.
   a) Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que $v_n = |u_{n-1}|$ ou $v_n = |u_n|$.
   b) Le réel α vérifie-t-il la propriété $\mathscr{B}$?
6) Soit α un réel appartenant à l'intervalle $\left[\dfrac{9}{7};2\right[$ et (u_n) la suite qui lui est associée.
   a) Pour tout réel x, on pose $P(x) = \alpha x^3 - x - 1$ et $Q(x) = 8x^3 - 116x^2 + 494x - 441$. Démontrer que
   $$P\left(\frac{11-2\alpha}{7}\right) = \frac{(2-\alpha)Q(\alpha)}{7^3}.$$
   b) Étudier les variations de la fonction $x \mapsto P(x)$ sur l'intervalle $[1;+\infty[$ et de la fonction $x \mapsto Q(x)$ sur l'intervalle $[1;2]$.
   c) Quel est le signe de $Q(\alpha)$?
   d) Comparer les réels $\dfrac{11-2\alpha}{7}$ et $-u_3$.
   e) Le réel α vérifie-t-il la propriété $\mathscr{B}$?

7) Soit α un réel appartenant à l'intervalle $\left]1;\frac{9}{7}\right[$. Pour tout réel x, on pose $S_0(x) = x$, $S_1(x) = 1$, puis

$$S_{k+2}(x) = S_{k+1}(x)^2 - \alpha S_k(x)^4$$

pour tout entier $k \geqslant 0$. On *admet* pour l'instant qu'il existe un réel $\mathrm{t}(\alpha) > 1$ tel que

$$1 < S_4(x) \leqslant S_3(x)^2 \leqslant \mathrm{t}(\alpha)^2 S_4(x)$$

pour tout réel $x \in [1;\mathrm{t}(\alpha)]$.

a) Soit $n \geqslant 0$ un entier tel que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n^2 < \mathrm{t}(\alpha)^2 u_{n+1}$; on pose $x_n = \sqrt{\frac{u_n^2}{u_{n+1}}}$. Démontrer que $u_{n+k} = u_{n+1}^{2^{k-1}} S_k(x_n)$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

b) Le réel α vérifie-t-il la propriété $\mathscr{B}$?

8) On démontre maintenant que l'unique réel positif $\mathrm{t}(\alpha)$ tel que $\mathrm{t}(\alpha)^4 = \frac{\alpha+2}{3}$ vérifie les hypothèses de la question 7).

a) Démontrer que $S_4(x) \leqslant S_3(x)^2$ pour tout réel x.

b) Démontrer que $0 < S_2(x)^2 \leqslant \frac{7(\alpha-1)}{12}$ pour tout réel $x \in [1;\mathrm{t}(\alpha)]$.

c) Démontrer que $1 < S_4(x)$ pour tout réel $x \in [1;\mathrm{t}(\alpha)]$.

d) Démontrer que $S_3(x)^2 \leqslant \frac{2+x^4}{3} S_4(x) \leqslant x^2 S_4(x)$ lorsque $x = \mathrm{t}(\alpha)$.

e) Étudier les variations de la fonction $x \mapsto \frac{S_4(x)}{S_3(x)^2}$ sur l'intervalle $[1;\mathrm{t}(\alpha)]$.

f) Conclure.

9) Quels sont les réels α qui vérifient la propriété $\mathscr{B}$?

Exercice 3

On dit qu'une fonction f vérifie la propriété $\mathscr{E}$ si, pour tout réel x,

$$f(x+1) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}\,.$$

1. Proposer une fonction continue qui vérifie la propriété $\mathscr{E}$.
2. On rappelle qu'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ est périodique s'il existe un réel $T > 0$ tel que

$$\text{pour tout réel } x\,,\ g(x+T) = g(x)\,.$$

   Soit f une fonction vérifiant $\mathscr{E}$. Démontrer que f est périodique.
3. Proposer une infinité de fonctions continues f vérifiant $\mathscr{E}$ et $f(0) = \frac{1}{2}$.